

Exercice 2

4points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point.

Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. • Δ_1 a pour vecteur directeur $\delta_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et Δ_2 a pour vecteur directeur $\delta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: les premières coordonnées ne sont pas égales, les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, les droites Δ_1 et Δ_2 ne sont pas parallèles;
En remplaçant respectivement dans les équations paramétriques s par 2 et t par 1, on trouve que le point de coordonnées $(-2 ; 6 ; 1)$ appartient bien aux deux droites.
2. a. $M(x = 1 + 2t ; y = 3 - t ; z = 1 + 2t) \in d$ appartient à P si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de P , donc si
$$4(1 + t) + 2(3 - t) - (1 + 2t) + 3 = 0 \iff 4 + 4t + 6 - 2t - 1 - 2t + 3 = 0 \iff 0t + 12 = 0 \iff 0t = -12$$
: cette équation n'a pas de solution : cela signifie que la droite d est parallèle strictement au plan P .
3. On considère les points $A(3 ; 2 ; 1)$, $B(7 ; 3 ; 1)$, $C(-1 ; 4 ; 5)$ et $D(-3 ; 3 ; 5)$.

Commençons par la deuxième affirmation : on a

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Il reste donc la première affirmation que l'on peut démontrer :

A, B, C et D sont coplanaires, c'est-à-dire si par exemple D appartient au plan (ABC) et dans ce cas si $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ (car \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas des vecteurs colinéaires).

Avec $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, l'égalité vectorielle précédente se traduit par le système :

$$\begin{cases} -6 = 4x - 4y \\ 1 = x + 2y \\ 4 = 4y \end{cases} \iff \begin{cases} -6 = 4x - 4 \\ 1 = x + 2 \\ 1 = y \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = 4x \\ -1 = x \\ 1 = y \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{2} = x \\ -1 = x \\ 1 = y \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution. Donc le point D n'appartient pas au plan défini par les points A, B et C ou encore A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

4. a. $R(1; 1; -2) \in (Q) \iff 3 \times 1 + -2 \times 1 - 2 + 1 = 0 \iff 3 - 2 - 2 + 1 = 0$ qui est vraie;
 $R(1; 1; -2) \in (Q') \iff 4 \times 1 + 1 \times 1 - (-2) + 3 = 0 \iff 10 = 0$ qui est fausse : la première affirmation est fausse;

b. (Q) a pour vecteur normal $\vec{q} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (Q') a pour vecteur normal $\vec{q}' \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\vec{q} \cdot \vec{q}' = 3 \times 4 - 2 \times 1 + 1 \times (-1) = 12 - 2 - 1 = 9 \neq 0$: les vecteurs normaux ne sont pas orthogonaux, les plans (Q) et (Q') ne sont pas perpendiculaires.

- c. Les points communs aux deux plans sont les points dont les coordonnées vérifient les équations de ces deux plans donc le système :

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 1 = 0 \\ 4x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

On peut poser $x = t$, avec $t \in \mathbb{R}$ et on obtient le système aux deux inconnues y et z suivant :

$$\begin{cases} x = t \\ 3x - 2y + z + 1 = 0 \\ 4x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ -2y + z = -3t - 1 \\ y - z = -4t - 3 \end{cases}$$

La somme membre à membre des deux dernières équations donne

$$-y = -7t - 4 = 0 \iff y = 7t + 4;$$

enfin la deuxième équation $-2y + z = -3t - 1$ donne $z = 2y - 3t - 1 = 2(7t + 4) - 3t - 1 = 14t + 8 - 3t - 1 = 11t + 7$.

Conclusion : les points communs aux deux plans sont les points dont les coordonnées

vérifient le système : $\begin{cases} x = t \\ y = 7t + 4 \\ z = 11t + 7 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$: c'est l'équation de la droite conte-

nant le point $K(0; 4; 7)$ et dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$. : la troisième affirmation est vraie.